Trazado del histograma de pesos de una muestra de monedas, con algunas consecuencias

L. VILLARONGA

Al estudiar una muestra de la población de una emisión monetaria, que puede proceder de un tesoro, de un sitio arqueológico o de la recogida de materiales en Museos y colecciones privadas, uno de los primeros aspectos a considerar es el metrológico.

Toda emisión monetaria es acuñada con un peso teórico determinado por la talla, que es el número de piezas contenidas en una unidad de peso. Estadísticamente este peso teórico será el peso medio de la población.

No todas las monedas pesan exactamente igual, las diferencias entre ellas obedecen a razones técnicas de su fabricación.

Estas diferencias para las monedas de oro son muy pequeñas, algo mayores para la plata y de alguna consideración para el bronce.

Estadísticamente el valor de estas discrepancias queda determinado por la desviación típica.

Con el peso medio y la desviación típica queda determinada una población, que debe ser normal. Gráficamente podemos representar el conjunto de pesos de una población o de una muestra por su histograma.

Para trazar el histograma establecemos unos ejes perpendiculares. En el de abcisas figuran los pesos, distribuidos por intervalos, en el de ordenadas el número de monedas comprendidas en cada intervalo. Los rectángulos formados determinan el histograma.

Para trazar el histograma es esencial el establecer un intervalo de pesos adecuado. Dividiendo la diferencia entre el peso de la moneda mayor y la menor por el valor del intervalo, tendremos el número de intervalos.

Debemos llamar la atención, que el hacer los intervalos más pequeños y por tanto mayor su número, no aumentará la justeza del histograma.

Para hallar el intervalo, en un principio utilizamos la fórmula:

$$\frac{\text{peso máximo} - \text{peso mínimo}}{\sqrt{N-1}}$$, en que N es el número de ejemplares.

Siendo el número de intervalos igual a $\sqrt{N-1}$

En general esta fórmula nos dio buenos resultados, quizá por haber trabajado con un número de monedas pequeño, por debajo del centenar.

Si el número de ejemplares fuera muy alto, supongamos de 300, entonces con dicha fórmula el número de intervalos sería excesivamente alto, superior a diez.

Posteriormente llegó a nuestro conocimiento [1] la siguiente fórmula:

$$\text{número de intervalos} = 1 + 3{,}3 \log. N$$

Con ella difícilmente pasaremos de los 12 intervalos, pues tendríamos que trabajar con una muestra de más de 2.000 monedas, cosa que ocurrirá raramente.

Si aceptamos esta fórmula y con ella el número de intervalos, podemos deducir su amplitud:

$$\text{amplitud del intervalo} = \frac{\text{peso máximo} - \text{peso mínimo}}{1 + 3{,}3 \log. N}$$

Puede tomarse el intervalo resultante aunque sea fraccionario o bien redondearlo.

Límite del intervalo central. El intervalo que incluye el peso medio de la muestra, le llamaremos central, y para hallar sus límites aplicaremos la fórmula:

$$X \pm \frac{\text{Intervalo}}{2}$$

En que X, es el peso medio de la muestra.

Con este intervalo y partiendo de él, estableceremos los demás intervalos y podremos determinar el número de monedas que están contenidas en cada uno de ellos, y finalmente trazar el histograma.

Como ejemplo damos en la figura 1, cuatro histogramas de la misma muestra de monedas, tres emisiones de Tiberio de Caesaraugusta, establecidas con distintos intervalos y límites:

a) intervalo de 1,5 gramos, intervalo central de 13 a 14,5
b) intervalo de 2 gramos, intervalo central de 13 a 15
c) intervalo de 2 gramos, intervalo central de 12 a 14
d) intervalo de 2 gramos, intervalo central de 12,5 a 14,5

Vemos que este último el *d*), en que el peso medio X está en el centro del intervalo, es el mejor, el que da una gráfica más simétrica.

1. Hewlet Packard programa 50458.

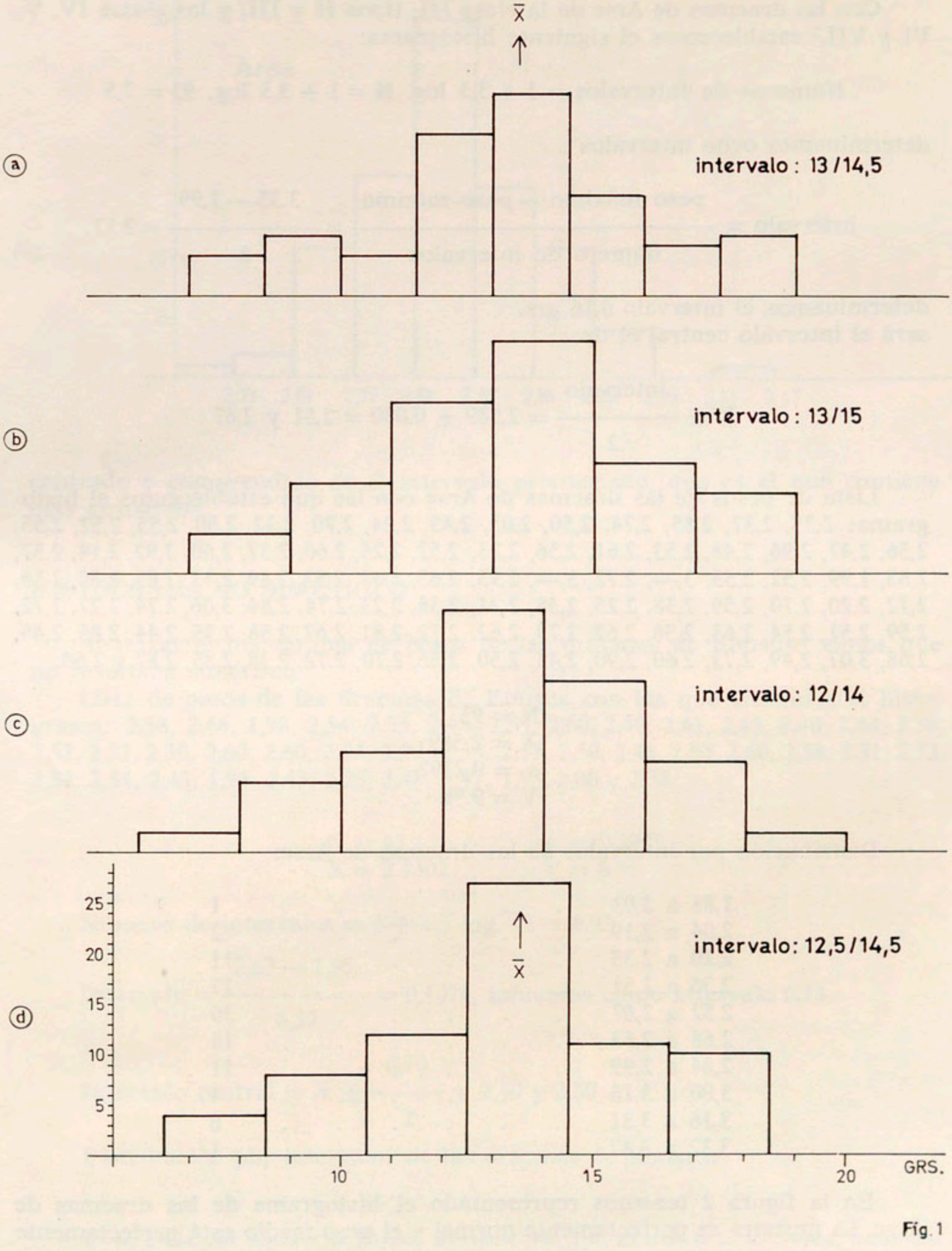

x̄
ⓐ
intervalo : 13 / 14,5
ⓑ
intervalo : 13 / 15
ⓒ
intervalo : 12 / 14
25
20
15
10
5
ⓓ
intervalo: 12,5 / 14,5
x̄
10
15
20
GRS.

Fig. 1

HISTOGRAMAS SIMÉTRICOS

Con las dracmas de Arse de la clase III, tipos II y III, y las classe IV, V, VI y VII,[2] establecemos el siguiente histograma:

$$\text{Números de intervalos} = 1 + 3{,}3 \text{ log. N} = 1 + 3{,}3 \text{ log. } 93 = 7{,}5$$

determinamos ocho intervalos

$$\text{intervalo} = \frac{\text{peso máximo} - \text{peso mínimo}}{\text{número de intervalos}} = \frac{3{,}35 - 1{,}99}{8} = 0{,}17$$

determinamos el intervalo 0,16 grs.
será el intervalo central el de:

$$X \pm \frac{\text{intervalo}}{2} = 2{,}589 \pm 0{,}080 = 2{,}51 \text{ y } 2{,}67$$

Lista de pesos de las dracmas de Arse con las que establecemos el histograma: 2,35, 2,37, 2,85, 2,74, 2,50, 2,05, 2,45, 2,24, 2,70, 2,32, 2,50, 2,55, 2,52, 2,55, 2,56, 2,47, 2,96, 2,48, 2,53, 2,61, 2,56, 2,23, 2,52, 2,25, 2,60, 2,37, 2,60, 2,92, 2,14, 2,57, 2,83, 1,99, 2,52, 2,55, 3,—, 2.72, 3,—, 2,95, 2,65, 2,63, 2,52, 2,89, 2,33, 2,85, 2,30, 2,56, 2,72, 2,20, 2,70, 2,59, 2,38, 2,25, 2,38, 2,21, 2,38, 2,23, 2,74, 2,84, 3,06, 2,74, 2,27, 2,72, 2,59, 2,51, 2,54, 2,63, 2,56, 2,62, 2,79, 2,62, 2,72, 2,81, 2,67, 2,58, 2,55, 2,44, 2,85, 2,45, 2,68, 3,07, 2,49, 2,73, 2,60, 2,90, 2,45, 2,50, 2,55, 2,70, 2,72, 2,38, 2,85, 2,87 y 2,60.

$$N = 93$$
$$X = 2{,}589$$
$$s = 0{,}2392$$
$$V = 9\ \%$$

Distribución por intervalos de las dracmas de Arse:

1,88 a 2,03	1
2,04 a 2,19	2
2,20 a 2,35	11
2,36 a 2,51	17
2,52 a 2,67	30
2,68 a 2,83	16
2,84 a 2,99	11
3,00 a 3,15	4
3,16 a 3,31	0
3,32 a 3,47	1

En la figura 2 tenemos representado el histograma de las dracmas de Arse. La muestra es perfectamente normal y el peso medio está perfectamente

2. L. Villaronga, *Las monedas de Arse-Saguntum*, Barcelona 1967.

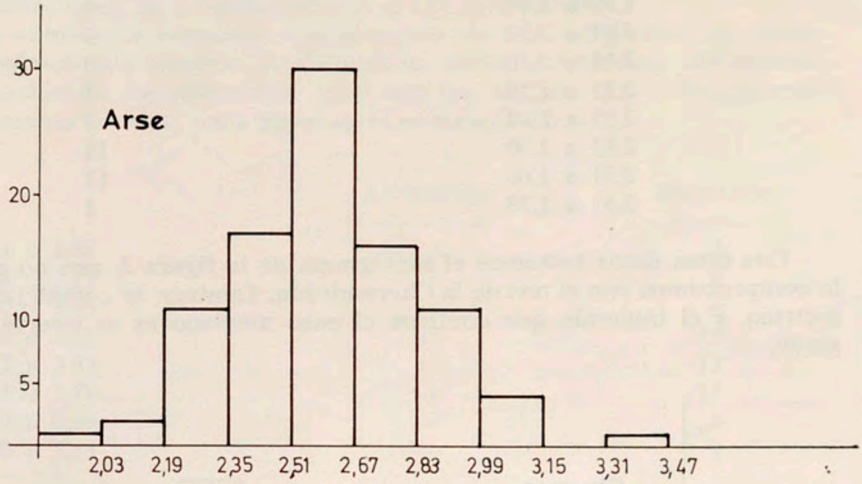


Fig. 2

centrado y comprendido en el intervalo privilegiado, que es el que contiene más elementos.

HISTOGRAMA NO SIMÉTRICO

Al trazar el histograma de pesos de las dracmas de Ebusus [3] vimos que no resultaba simétrico.

Lista de pesos de las dracmas de Ebusus con las que trazamos el histograma: 2,58, 2,46, 1,98, 2,54, 2,55, 2,48, 2,59, 2,60, 2,40, 2,41, 2,45, 2,40, 2,63, 2,38, 2,52, 2,32, 2,30, 2,60, 2,60, 2,04, 2,27, 2,58, 2,57, 2,50, 2,48, 2,50, 2,60, 2,58, 2,51, 2,52, 2,57, 2,54, 2,43, 1,96, 2,45, 2,25, 2,48, 2,47, 1,95, 2,00 y 2,58.

$$N = 41 \qquad s = 0{,}1923$$
$$X = 2{,}4302 \qquad V = 8\,\%$$

Número de intervalos $= 1 + 3{,}3 \log. 41 = 6{,}32$

$$\text{Intervalo} = \frac{2{,}63 - 1{,}95}{6{,}32} = 0{,}1076, \text{ tomamos como intervalo } 0{,}10$$

$$\text{Intervalo central} = X \pm \frac{0{,}10}{2} = 2{,}40 \text{ y } 2{,}50$$

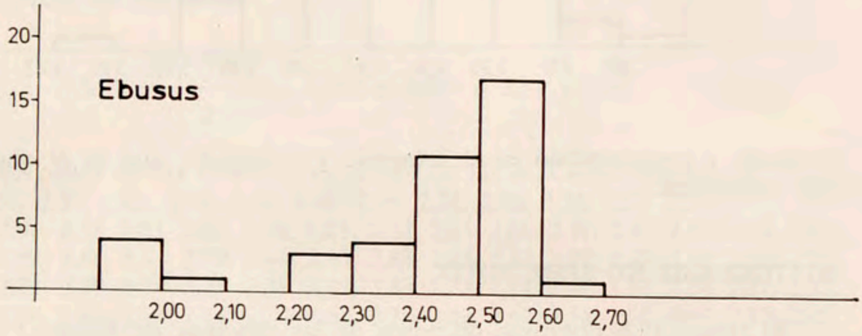
Distribución por intervalos de las dracmas de Ebusus:

3. M. Camao, *Las monedas de Ebusus*, Barcelona 1976. J.-C. Richard et L. Villaronga, *Recherches sur les étalons monétaires en Espagne et en Gaule du sud, anterieurement à l'époque d'Auguste*, Mélanges de la Casa de Velazquez, IX, 1973, p. 94, figs. 2-8.

1,90 a 2,00	4
2,01 a 2,10	1
2,11 a 2,20	0
2,21 a 2,30	3
2,31 a 2,40	4
2,41 a 2,50	11
2,51 a 2,60	17
2,61 a 2,70	1

Con estos datos trazamos el histograma de la figura 3, que no es normal, lo comprobamos con el test de la Chi-cuadrado. También es completamente asimétrico, y el intervalo que contiene el peso mediano es el intervalo privilegiado.

Fig. 3



INTERPRETACIÓN DEL HISTOGRAMA DE EBUSUS

Las dracmas de Ebusos de nuestra muestra que no es normal, deben proceder de una población normal de la que se han separado los valores altos, o sea que faltan los intervalos altos de nuestro histograma, que de existir nos darían el histograma simétrico y normal.

Partiendo de la muestra que poseemos de las dracmas de Ebusus debemos reconstruir la población normal de donde proceden y para ello partimos de la hipótesis de que faltan los pesos altos, que han sido separados de la circulación monetaria antes de formarse la muestra que ha llegado hasta nosotros.

Aceptada esta hipótesis, si consideramos que en el intervalo privilegiado, o sea la moda debe figurar el peso medio de la población, pasaremos del peso medio de la muestra de 2,43 gr. al de 2,58, que consideraremos el peso medio de la población.

Para la desviación típica, parece natural que la de la población sea algo mayor que la de la muestra, resultado de añadir los pesos altos, que darán una mayor dispersión. Para establecer su nuevo valor debemos añadirle una parte del incremento que damos al peso medio. A falta de un sistema matemático, lo hemos deducido empíricamente y para este caso añadimos un tercio del aumento del peso medio:

Desviación típica de la población = s + 1/3. 0,15 = 0,24.

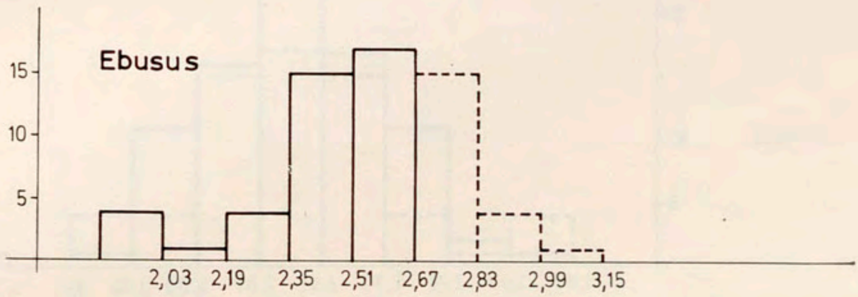
Para el número de elementos completamos los intervalos altos con número de ejemplares que resulten simétricos, en torno al intervalo privilegiado.

Distribución de los intervalos: (que son los mismos que determinamos para las dracmas de Arse, para hacer fácil su comparación).

	Asimétrico	*Simétrico*
1,88 a 2,03	4	4
2,04 a 2,19	1	1
2,20 a 2,35	4	4
2,36 a 2,51	15	15
2,52 a 2,67	17	17
2,68 a 2,83	—	15
2,84 a 2,99	—	4
3,00 a 3,15	—	1

Con ello pasamos de 41 a 61 elementos, formando el histograma de la figura 4, que es perfectamente simétrico y normal.

Fig. 4



COMPARACIÓN DE LAS DOS MUESTRAS DE DRACMAS DE ARSE Y EBUSUS

Las dos muestras tiene los siguientes datos:

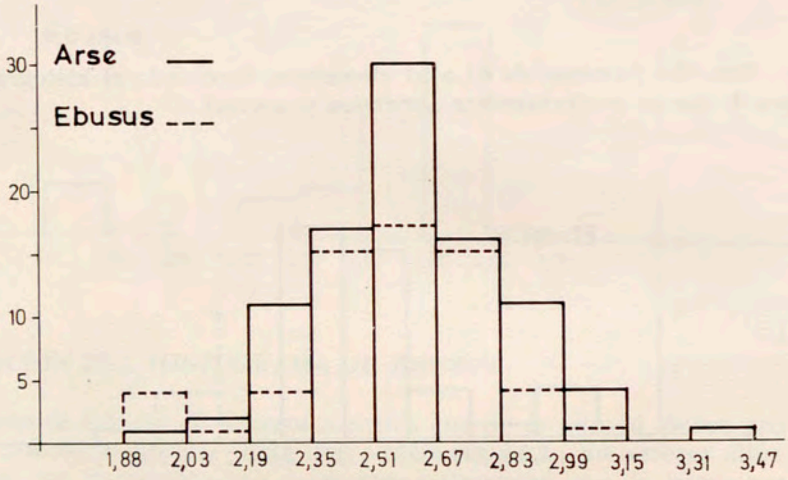
ARSE:	N = 93,	X = 2,589,	s = 0,239
EBUSUS:	N = 61,	X = 2,58,	s = 0,24

Trazamos sus histogramas y para poderlos comparar, lo hacemos con los mismos intervalos:

	Ebusus	Arse
1,88 a 2,03	4	1
2,04 a 2,19	1	2
2,20 a 2,35	4	11
2,36 a 2,51	15	17
2,52 a 2,67	17	30
2,68 a 2,83	15	16
2,84 a 2,99	4	11
3,00 a 3,15	1	4
3,16 a 3,31	0	0
3,32 a 3,47	0	1

En el histograma de la figura 5 la línea de trazo seguido corresponde a Arse y la de línea de puntos a Ebusus.

Fig. 5



Aplicando el test de la Chi-cuadrado a estos dos conjuntos, vemos que son perfectamente comparables a un nivel de confianza del 38 %.

Con lo que podemos deducir: que aceptada la hipótesis de completar la muestra de las dracmas de Ebusus con los valores altos que faltan, las dos muestras de Arse y de Ebusus proceden de una misma población, han sido acuñadas con el mismo patrón metrológico y con técnica parecida.

CONCLUSIÓN

Partiendo de la forma de trazar un histograma del peso de las monedas, hemos visto a través de dos ejemplos, que éstos pueden resultar simétricos o asimétricos, o sea normales o no normales.

El caso concreto que hemos expuesto de las dracmas de Arse y Ebusus, creemos se puede generalizar y ante un histograma asimétrico, se puede considerar que a la muestra estudiada le ha sido separada una parte de ella, en nuestro caso los pesos altos, que corresponde a las monedas mejores, y en las que su peso real de plata excedía al teórico, representado por el peso medio.

Si restituimos las monedas que faltan, naturalmente de una manera hipotética, reconstruimos la población, cuyo peso medio será el del intervalo privilegiado.

El estudio de otros casos, permitirá formar un criterio, para aceptar o rechazar la hipótesis que aquí presentamos.

Redactado este trabajo en junio de 1978, nos llega la obra GREEK AND ARCHAELOGY, Essays in honour of M. Thompson, New York 1979, que contiene el trabajo de R. Ross HOLLOWAY, «The bronze coinage of Agathocles», que en la página 87 considera como patrón de una emisión el peso de la «moda» o sea el «valor del intervalo privilegiado», que es el que tiene una frecuencia más alta, añadiéndole una desviación típica:

patrón teórico = moda + desviación típica.

Este sistema, que el autor no demuestra y tan solo enuncia, es parecido al nuestro, con la diferencia de la desviación típica, que por el momento no podemos aceptar hasta que previamente nos sea demostrado.